EXERCICE 4 (6 points)

Partie A

On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur **R** :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

On définit la fonction F sur **R** par $F(x) = \int_2^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Déterminer les variations de la fonction F sur **R**.

2. Montrer que $0 \leq F(3) \leq 4e^{-2}$.

Partie B

La fonction f considérée dans la partie **A** est la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^2e^{-x}$.
On appelle g la fonction définie sur **R** par $g(x) = e^{-x}$.

On désigne par (C) et (Γ) les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Les courbes sont tracées en annexe, page 7.

1. a) Montrer que les variations de la fonction f sont bien celles données dans la partie **A**.
   On ne demande pas de justifier les limites.

   b) Étudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ).

2. Soit h la fonction définie sur **R** par $h(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$.

   a) Montrer que la fonction H définie sur **R** par $H(x) = (-x^2 - 2x - 1)e^{-x}$ est une primitive de la fonction h sur **R**.

   b) Soit un réel α supérieur ou égal à 1.

   On considère la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
   Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, de cette partie du plan.

   c) Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

3. On admet que, pour tout réel m strictement supérieur à $4e^{-2}$, la droite d'équation $y = m$ coupe la courbe (C) au point P(x_P ; m) et la courbe (Γ) au point Q(x_Q ; m).

L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe une seule valeur de x_P appartenant à l'intervalle $]-\infty, -1]$ telle que la distance PQ soit égale à 1.

a) Faire apparaître approximativement sur le graphique (proposé en annexe, page 7) les points P et Q tels que $x_P \in]-\infty, -1]$ et PQ = 1.

b) Exprimer la distance PQ en fonction de x_P et de x_Q.
Justifier l'égalité $f(x_P) = g(x_Q)$.

c) Déterminer la valeur de x_P telle que PQ = 1.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

EXERCICE 4