

EXERCICE 2 (5 points)

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(0, 0, 2)$, $B(0, 4, 0)$ et $C(2, 0, 0)$.

On désigne par I le milieu du segment $[BC]$, par G l'isobarycentre des points A, B et C, et par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) .

Proposition 1 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM} \cdot \vec{BC} = 0$ est le plan (AIO) ».

Proposition 2 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MB} - \vec{MC}\|$ est la sphère de diamètre $[BC]$ ».

Proposition 3 : « le volume du tétraèdre OABC est égal à 4 ».

Proposition 4 : « le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y + 2z = 4$ et le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$ ».

Proposition 5 : « la droite (AG) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=2-2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ ».