Exercice 4 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$.

1. Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.

On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2. Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2).

Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-8+3t \\ z=t \end{cases}$ ($t \in \mathbf{R}$).

3. Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9,-4,-1)$.

a) Vérifier que A n'appartient ni à (P_1), ni à (P_2).

b) Exprimer AM^2 en fonction de t.

c) Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t)=2t^2-2t+3$.

- Étudier les variations de f.
- Pour quel point M, la distance AM est-elle minimale ?

Dans la suite, on désignera ce point par I.

- Préciser les coordonnées du point I.

4. Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A.

a) Déterminer une équation de (Q).

b) Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D).