Exercice 3 (7 points)

1. Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x)=\left(2x^3-4x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=2x\left(-x^2+5x-4\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   c) Dresser le tableau de variations de f.

   d) Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$.
   (Unité graphique : 1 cm).

2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $I_n=\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

   a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

   b) On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2, $I_n = n\,I_{n-1}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

   Déterminer I_2 et I_3.

   c) Soit A l'aire, exprimée en cm^2, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
   Calculer A.

3. Soit u une fonction définie et dérivable sur **R**.

On définit la fonction v sur $]0\,,+\infty[$ par $v(x)=u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   a) On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a\,,b]$ (où $0 < a < b$).
   Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\dfrac{1}{b}\,,\dfrac{1}{a}\right]$.

   b) On définit maintenant la fonction g par $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]\,0\,,+\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.
   Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

   c) Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0,+\infty[$.