Exercice 4 (*7 points*)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.
Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0,+\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' = -\frac{1}{20}y(3-\ln y).$$

1. Démontrer l'équivalence suivante :
Une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0,+\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0,+\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)\left[3-\ln(f(t))\right]$ si et seulement si la fonction $g=\ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0,+\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$.

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$(H) \qquad z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0,+\infty[$:

$$f(t) = \exp\left(3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

(la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto e^x$).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :

$$f(t) = \exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0,+\infty[$.

c. Résoudre dans $[0,+\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0{,}02$.

Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Tournez la page S.V.P.

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas ».

On note M l'événement « l'animal est malade », $\bar{M}$ l'événement contraire et T l'événement « le test est positif ».

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\bar{M}}(T)$.

2. En déduire $P(T)$.

3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?