EXERCICE 3 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On complètera la figure donnée en annexe 2 au fur et à mesure des questions, et on la rendra avec la copie.

ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = +\frac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré ABCD. Soit J le milieu du segment [CD].

On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s.
Dans la partie A on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la partie B on utilisera les nombres complexes.

Partie A

1) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.

2) On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AI] . Γ_2 est le cercle de diamètre [BJ] . Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.

3) Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.

4) On pose $h = s \circ s$ (composée de s avec elle même).

a) Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).

b) Trouver l'image du point A par h. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0 , 2 , 2 + 2i et 2i.

1) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = \frac{1}{2}iz + 1 + i$.

2) Calculer l'affixe du point Ω.

3) Calculer l'affixe du point E tel que $s(E) = A$. Placer le point E sur la figure.

ANNEXE 2

À compléter et à rendre avec la copie.

Figure de l'exercice 3