

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z} = i$. Écrire la solution sous forme algébrique.

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.

3) Soient A, B, A' et D les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$a = 2, \quad b = 4, \quad a' = 2i \quad \text{et} \quad d = 2 + 2i.$$

Quelle est la nature du triangle ODB ?

4) Soient E et F les points d'affixes respectives $e = 1 - i\sqrt{3}$ et $f = 1 + i\sqrt{3}$.

Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ?

5) Soit \mathcal{C} le cercle de centre A et de rayon 2. Soit \mathcal{C}' le cercle de centre A' et de rayon 2.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

a) On désigne par E' l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E'.

b) Démontrer que le point E' est un point du cercle \mathcal{C}' .

c) Vérifier que : $e - d = (\sqrt{3} + 2)(e' - d)$. En déduire que les points E, E' et D sont alignés.

6) Soit D' l'image du point D par la rotation r . Démontrer que le triangle EE'D' est rectangle.