Exercice 2 (*5 points*)

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 5 cm pour unité graphique.
Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)z+1.$$

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ.

2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n, on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.
   a. Déterminer les affixes des points A_1, A_2 et A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3.
   b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.
   c. A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?

3. *a.* Quelle est la nature du triangle $\Omega A_0 A_1$?
   En déduire, pour tout entier naturel n, la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.
   b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$.
   On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
   Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?