EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

1) a) Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

b) Étudier les variations de la fonction f.

2) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

a) On a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur la **figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie**. Construire la droite d'équation $y = x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives u_1 et u_2. Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant e$ (on pourra utiliser la question **1b)**).

c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[e\,;+\infty[$.

Partie B

On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

1) En étudiant de deux manières la limite de la suite $(f(u_n))$, démontrer que $f(\ell) = \ell$.

2) En déduire la valeur de ℓ.

ANNEXE

À compléter et à rendre avec la copie.

Figure de l'exercice 1