Exercice 4 (*7 points*)
Commun à tous les candidats

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.
On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0;+\infty[$, les solutions de l'équation $E_a\ :\ x^a = a^x$.

I) Etude de quelques cas particuliers

1) Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2.
2) Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.
3) On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_{e}.
On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $h(x) = x - \mathrm{e}\ln x$.
   a) **Question de cours :**
   On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ tend vers $+\infty$.
   Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
   b) Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.
   c) Etudier les variations de h sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   d) Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_{e}.

II) Résolution de l'équation E_a.

1) Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$.
2) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
   a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.
   b) Etudier les variations de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.
   d) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
   (Unité : 2 cm).

3) Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions (P_1) et (P_2) suivantes :
   (P_1) : si $a \in]0;1]$ alors E_a admet l'unique solution a ;
   (P_2) : si $a \in]1;\mathrm{e}[\cup]\mathrm{e};+\infty[$ alors E_a admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle $]1;\mathrm{e}[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]\mathrm{e};+\infty[$.