Exercice 2 (*5 points*)

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.
Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1.
On définit, pour tout entier naturel *n*, la suite (z_n) de nombres complexes par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \lambda \cdot z_n + \mathrm{i} \end{cases}.$$

On note M_n le point d'affixe z_n.

1) Calcul de z_n en fonction de *n* et de λ.
   a) Vérifier les égalités : $z_1 = \mathrm{i}$; $z_2 = (\lambda+1)\mathrm{i}$; $z_3 = (\lambda^2+\lambda+1)\mathrm{i}$.
   b) Démontrer que, pour tout entier *n* positif ou nul : $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i}$.

2) Etude du cas $\lambda = \mathrm{i}$.
   a) Montrer que $z_4 = 0$.
   b) Pour tout entier naturel *n*, exprimer z_{n+4} en fonction de z_n.
   c) Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
   d) Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

3) Caractérisation de certaines suites (z_n).
   a) On suppose qu'il existe un entier naturel *k* tel que $\lambda^k = 1$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a l'égalité : $z_{n+k} = z_n$.
   b) Réciproquement, montrer que s'il existe un entier naturel *k* tel que, pour tout entier naturel *n*, on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$, alors : $\lambda^k = 1$.