

Exercice 2 (5 points)*Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.*

Le but de cet exercice est d'étudier une même configuration géométrique à l'aide de deux méthodes différentes.

I) A l'aide des nombres complexes, sur un cas particulier.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

- 1) On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et $5i$.
 - a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et B en O .
 - b) Déterminer les éléments caractéristiques de s . On note Ω son centre.
 - c) Déterminer le point $s \circ s(B)$; en déduire la position du point Ω par rapport aux sommets du triangle ABO .

- 2) On note \mathcal{D} la droite d'équation $x - 2y = 0$, puis A' et B' les points d'affixes respectives $8 + 4i$ et $2 + i$.
 - a) Démontrer que les points A' et B' sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et de B sur la droite \mathcal{D} .
 - b) Vérifier que $s(B') = A'$.
 - c) En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[A'B']$.

II) A l'aide des propriétés géométriques des similitudes.

OAB est un triangle rectangle en O tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$.

- 1) On note encore s est la similitude directe telle que $s(O) = A$ et $s(B) = O$. Soit Ω son centre.
 - a) Justifier le fait que l'angle de s est égal à $\frac{\pi}{2}$.
 - b) Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[OA]$. (On admet de même que Ω appartient aussi au cercle de diamètre $[OB]$.)
En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB .

- 2) On désigne par \mathcal{D} une droite passant par O , distincte des droites (OA) et (OB) .
On note A' et B' les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur la droite \mathcal{D} .
 - a) Déterminer les images des droites (BB') et \mathcal{D} par la similitude s .
 - b) Déterminer le point $s(B')$.
 - c) En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[A'B']$.