EXERCICE 4 (7 points)

1) **Restitution organisée de connaissances.**

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur **R** et est égale à sa fonction dérivée ;
- $e^0 = 1$;
- pour tout réel x, on a $e^x > x$.
- Soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A, +\infty[$ où A est un réel positif.
  Si pour tout x de $[A, +\infty[$ $\psi(x) \leq \varphi(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a) On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$, $g(x) \geq 0$.

b) En déduire que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

2) On appelle f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$.

On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
La courbe C est représentée en annexe page 6.

a) Montrer que f est positive sur $[0, +\infty[$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour C.

c) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0, +\infty[$.

3) On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}}$.

c) Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0, +\infty[$.

d) Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $F(\alpha) = 0{,}5$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

4) Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.
Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $A_n \geq 0{,}5$.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à remettre avec la copie.

EXERCICE 4