EXERCICE 3 (5 points)

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.
La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1) On appelle :
E_1 l'événement « le joueur perd la première partie » ;
E_2 l'événement « le joueur perd la deuxième partie » ;
E_3 l'événement « le joueur perd la troisième partie ».

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Montrer que la probabilité de l'événement $(X = 2)$ est égale à 0,031 et que celle de l'événement $(X = 3)$ est égale à 0,002.

c) Déterminer la loi de probabilité de X.

d) Calculer l'espérance de X.

2) Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : « le joueur perd la n-ième partie », $\overline{E_n}$ l'événement contraire, et on note p_n la probabilité de l'événement E_n.

a) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des événements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n.

b) En déduire que $p_{n+1} = 0{,}05p_n + 0{,}05$ pour tout entier naturel n non nul.

3) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$.

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.