

**EXERCICE 2 (5 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique : 1 cm).  
On fera une figure que l'on complétera tout au long de cet exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives  $a = 3 + 5i$ ,  $b = -4 + 2i$  et  $c = 1 + 4i$ .

Soit  $f$  la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe  $z$ , associe le point M' d'affixe  $z'$  définie par  $z' = (2 - 2i)z + 1$ .

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ .
  
- 2) a) Déterminer l'affixe du point B' image du point B par  $f$ .  
b) Montrer que les droites  $(CB')$  et  $(CA)$  sont orthogonales.
  
- 3) Soit M le point d'affixe  $z = x + iy$ , où on suppose que  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.  
Soit M' l'image de M par  $f$ .  
Montrer que les vecteurs  $\overline{CM'}$  et  $\overline{CA}$  sont orthogonaux si et seulement si  $x + 3y = 2$ .
  
- 4) On considère l'équation (E) :  $x + 3y = 2$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - a) Vérifier que le couple  $(-4, 2)$  est une solution de (E).
  - b) Résoudre l'équation (E).
  - c) En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle  $[-5, 5]$  et tels que les vecteurs  $\overline{CM'}$  et  $\overline{CA}$  soient orthogonaux.  
Placer ces points sur la figure.