EXERCICE 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

1) La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.

a) On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan ***en annexe***, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées (2 ; 0). Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

b) Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \frac{23}{18}$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geqslant \frac{23}{18}$.

d) Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2) a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :
$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$ c'est-à-dire que $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.

b) La suite v est définie par $v_n = 1{,}2777\ldots7$ avec n décimales consécutives égales à 7.

Ainsi $v_0 = 1{,}2$, $v_1 = 1{,}27$ et $v_2 = 1{,}277$.

En utilisant le **a)** démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3) La suite u définie au **1)** et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

ANNEXE

(À compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 2