EXERCICE 3 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) On considère l'ensemble $A_7 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

a) Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau figurant ***en annexe 2*** l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1$ (modulo 7).

b) Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5$ (modulo 7) équivaut à $x \equiv 4$ (modulo 7).

c) Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0$ (modulo 7) sont les multiples de 7.

2) Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.
On considère l'ensemble $A_p = \{1 ; 2 ; \ldots ; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.

a) Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1$ (modulo p).

b) On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p de l'équation $ax \equiv 1$ (modulo p).

c) Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0$ (modulo p) si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p.

d) Application : $p = 31$.

Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1$ (modulo 31) et $3x \equiv 1$ (modulo 31).

À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbf{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0$ (modulo 31).

ANNEXE 2

(À compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 3

a	1	2	3	4	5	6
y						6