EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$.

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point
$M' = f(M)$ d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z}{|z|}(2-|z|)$.

Le cercle C_1, de centre O et de rayon 1, est représenté sur la figure, donnée en annexe page 6, que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Pour z complexe non nul, on note $z = r\,e^{i\alpha}$, r étant le module de z et α un argument de z.

1. Montrer que $z' = (2-r)e^{i\alpha}$.

2. Déterminer l'affixe a' du point A', image par f du point A d'affixe $a = 3$.

3. Soit B le point d'affixe $b = -\sqrt{3} + i$.

   a) Écrire b sous forme exponentielle.

   b) Déterminer l'affixe b' du point B', image du point B par f.

4. Placer A, B, A' et B' sur la figure.

5. a) Déterminer l'ensemble E des points M du plan privé du point O dont l'image par f est O.

   b) Représenter E sur la figure.

6. Montrer que le cercle C_1 est l'ensemble des points M du plan distincts de O tels que
   $f(M) = M$.

7. Pour cette question, M est un point du plan, distinct de O, n'appartenant pas au cercle C_1.

   On appelle I le milieu du segment $[MM']$ où M' est l'image de M par f.

   a) Montrer que I appartient à C_1.

   b) Montrer que I appartient à la demi-droite [OM).

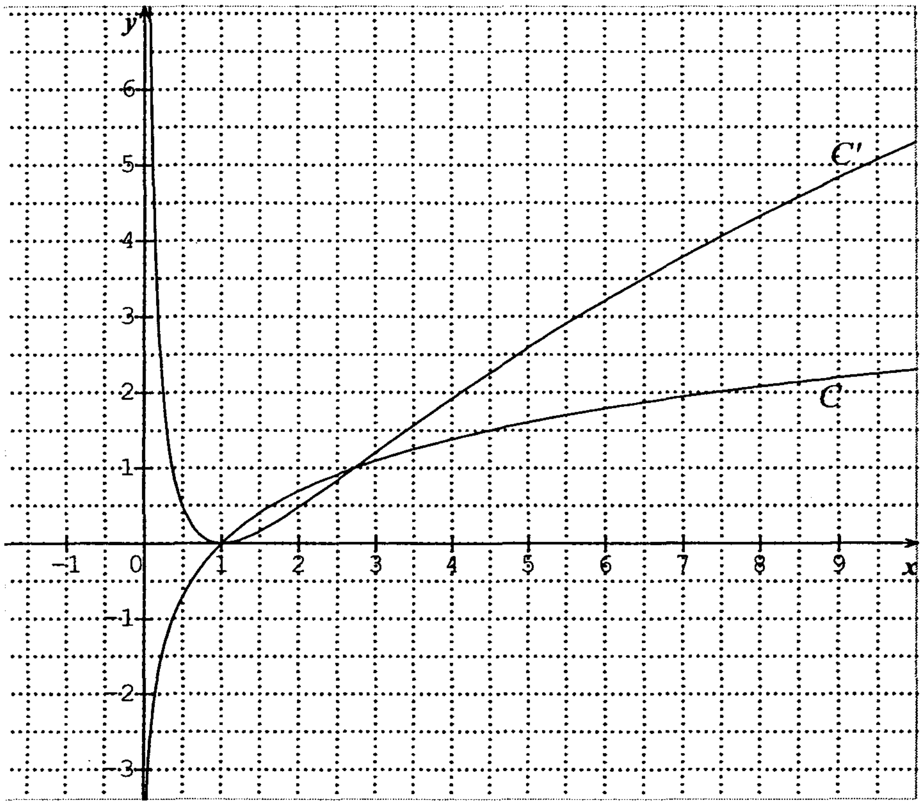
   c) Sur la figure donnée en annexe est placé un point nommé M_1.

   Construire le point M_1', image par f du point M_1.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

EXERCICE 3



EXERCICE 4