

EXERCICE 3 (4 points)

On considère deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.

On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1 , on note sa couleur et on la remet dans U_1 .

Étape n ($n \geq 2$) :

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1 , on note sa couleur et on la remet dans U_1 .
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2 , on note sa couleur et on la remet dans U_2 .

On note A_n l'événement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité.

On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2 .
2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8 p_n + 0,05$.
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer p_3 .
4. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0,25$.
b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
c) En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ .
d) Justifier que ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0,8\ell + 0,05$. En déduire la valeur de ℓ .