EXERCICE 1 (6 points)

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\ln x$ et $g(x)=(\ln x)^2$.

On note C et C' les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal.

Les courbes C et C' sont données en annexe, page 6.

1. a) Étudier le signe de $(\ln x)(1-\ln x)$ sur $]0,+\infty[$.

   b) En déduire la position relative des deux courbes C et C' sur $]0,+\infty[$.

2. Pour x appartenant à $]0,+\infty[$, M est le point de C d'abscisse x et N est le point de C' de même abscisse.

   a) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=f(x)-g(x)$.

   Étudier les variations de la fonction h sur $]0,+\infty[$.

   b) En déduire que sur l'intervalle $[1,\mathrm{e}]$, la valeur maximale de la distance MN est obtenue pour $x=\sqrt{\mathrm{e}}$.

   c) Résoudre dans $]0,+\infty[$ l'équation $(\ln x)^2-\ln x=1$.

   d) En déduire que, sur $]0,1[\cup]\mathrm{e},+\infty[$, il existe deux réels a et b ($a<b$) pour lesquels la distance MN est égale à 1.

3. a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$.

   b) Vérifier que la fonction G définie sur $]0,+\infty[$ par $G(x)=x\left[(\ln x)^2-2\ln x+2\right]$ est une primitive de la fonction g sur $]0,+\infty[$.

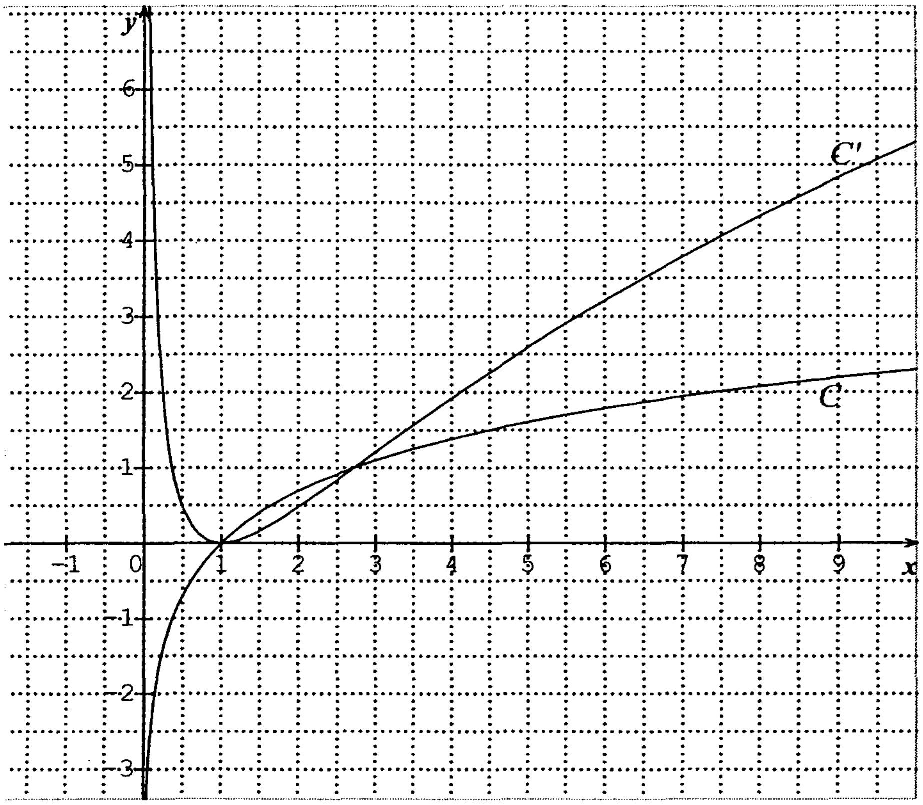
   c) On considère la partie du plan délimitée par les courbes C, C' et les droites d'équations $x=1$ et $x=\mathrm{e}$.

   Déterminer l'aire **A** en unités d'aire de cette partie du plan.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

EXERCICE 3



EXERCICE 4